27 MAGGIO 2020

V - IL CAMPO LIBERO GAUSSIANO CONTINUO

[Werner, Powell]
[Berestycki]

"GAUSSIAN FREE FIELD" = GFF

1. IL GFF COME "DISTRIBUZIONE ALEATORIA"

FISSIAMO $D \subseteq \mathbb{R}^d$ APERTO, LIMITATO, CON FRONTIERA ∂D "RAGIONEVOLE"

SIA $G_D : \bar{D} \times \bar{D} \to [0, \infty]$ LA FUNZIONE DI GREEN DI D

DEFINIAMO $\mathcal{D} = \mathcal{D}(D) = C_c^\infty(D) = \{ f : D \to \mathbb{R} \ C^\infty \text{ A SUPP. COMP.} \}$

DEFINIZIONE (GFF COME PROC. STOC.)

SI DICE GFF SU D (CONTINUO) UN PROC. STOC. $H = (H_f)_{f \in \mathcal{D}}$ GAUSSIANO CENTRATO CON

$$\mathrm{Cov}[H_f, H_g] = G_D(f,g) := \langle f, G_D g \rangle$$
$$= \int_{D \times D} f(x)\, G_D(x,y)\, g(y)\, dx\, dy$$

PER DEF. IL GFF È "SOLO" UN PROC. STOC., OSSIA UNA FAM. DI V.A. $H_f : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ DI CUI SPECIFICHIAMO LE LEGGI FINITO-DIM.

DATO CHE $\mathcal{D}$ È UNA FAM. PIÙ CHE NUMERABILE, NON ABBIAMO NESSUNA INFORMAZ. SULLA "REGOLARITÀ DELLE TRAIETTORIE": PER $\omega \in \Omega$ FISSATO:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto H_f(\omega) \end{aligned}$$

AD ES., $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{D}$ FISSATI, VALE LA LINEARITÀ:

$$H_{\alpha f + \beta g}(\omega) = \alpha H_f(\omega) + \beta H_g(\omega) \quad \forall \omega \in A = A_{\alpha,\beta,f,g} \subseteq \Omega$$

CON $\mathbb{P}(A) = 1$.

NON È CHIARO SE SI POSSA COSTRUIRE (SCEGLIERE UNA VERSIONE DI) IL GFF IN MODO CHE LA LINEARITÀ VALGA CON UN A "UNIVERSALE" (INDIP. DA α, β, f, g) CON $\mathbb{P}(A) = 1$. MOSTRIAMO CHE CIÒ È POSSIBILE.

<u>DEFINIZIONE</u>

SI DICE SPAZIO DI CAMERON-MARTIN DEL GFF SU D LO SP. DI HILBERT

$H_0^1(D) :=$ CHIUSURA DI $\mathcal{D}(D) = C_c^\infty(D)$ RISPETTO ALLA NORMA

$$\|f\|_{H_0^1} := \left(\int_D |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_D f(x) \, (-\Delta f(x)) \, dx \right)^{1/2}$$

SI MOSTRA CHE

$$H_0^1(D) = \Big\{ f \in L^2(D) : \underbrace{\nabla f}_{\text{DISTRIBUZ.}} \in L^2(D), \ \underbrace{f \equiv 0 \text{ SU } \partial D}_{f|_{\partial D} \in L^2(\partial D)} \Big\} \subsetneq L^2(D)$$

LA DEFINIZIONE È "RAGIONEVOLE": PER LA LEGGE $N(0,K)$ SU $\mathbb{R}^d$, IL PRODOTTO SCALARE DI CAMERON-MARTIN È $(\cdot,\cdot) := \langle \cdot, K^{-1} \cdot \rangle$.
PER IL GFF $K \Leftrightarrow G_D$ DUNQUE $K^{-1} \Leftrightarrow G_D^{-1} = (-\Delta)$.

<u>PROGRAMMA</u>: FISSIAMO $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ BASE ORTONORMALE DI H_0^1.
SIANO $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ V.A. IID $N(0,1)$. VOGLIAMO COSTRUIRE IL GFF COME

"$H = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n h_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n(\omega)\, h_n(x)$" [IN UN SENSO OPPORTUNO]

FATTO: $\exists$ BASE ORTONORMALE DI $L^2(D)$ $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI $-\Delta$ CON CONDIZIONI AL BORDO NULLE:

$$-\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \qquad 0<\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n\to\infty.$$

$$\langle\varphi_m,\varphi_n\rangle=\delta_{m,n}, \quad \varphi_n\in C^\infty(D), \quad \varphi_n(x)=0\ \forall x\in\partial D.$$

$$\Rightarrow G_D\varphi_n=\lambda_n^{-1}\varphi_n$$

ALLORA $\left(h_n := \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ È BASE ORTONORMALE DI H^1_0.

$$\underbrace{(h_m,h_n)}_{\text{PROD. SC. IN } H^1_0} = \langle h_m,(-\Delta)h_n\rangle = \frac{\langle\varphi_m,(-\Delta)\varphi_n\rangle}{\sqrt{\lambda_m}\sqrt{\lambda_n}} = \delta_{mn}$$

DEFINIZIONE

PER $s\in[0,\infty)$ DEF

$$\mathcal{H}^s := \left\{f\in L^2(D): \|f\|_s^2 := \sum_{n=1}^\infty \overbrace{\lambda_n^s\langle f,\varphi_n\rangle^2}^{\langle f,\lambda_n^{s/2}\varphi_n\rangle^2 = \langle(-\Delta)^{s/2}f,\varphi_n\rangle^2} <\infty\right\} \subsetneq L^2(D)$$

$$= \left\{f\in L^2(D): (-\Delta)^{s/2}f\in L^2(D),\ f\equiv 0 \text{ SU } \partial D\right\}$$

ALLORA $\mathcal{H}^s$ È SPAZIO DI HILBERT CON

$$(f,g)_s := \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^s\langle f,\varphi_n\rangle\langle g,\varphi_n\rangle$$

ESERCIZIO: $\mathcal{D} = C_c^\infty \subseteq \mathcal{H}^s\ \forall s\ge 0$. [$|\langle f,\varphi_n\rangle| = O(\lambda_n^{-k})$, $\forall k\in\mathbb{N}$]

FATTO: $\mathcal{H}^1 = H^1_0$. OSSERVIAMO CHE SE $f \in C^2$ ALLORA

$$\langle f, -\Delta f\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_m\rangle \underbrace{\langle \varphi_m, -\Delta \varphi_n\rangle}_{\lambda_n \delta_{m,n}} \langle f, \varphi_n\rangle = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \varphi_n\rangle^2}_{\|f\|_1}$$

LEMMA

PER OGNI $s \in \left(\frac{d}{2}-1, \infty\right)$ SI HA $C_s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{\lambda_n^{1+s}} < \infty$ Q.C.

DIM. LEGGE DI WEYL $N(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\lambda_n \le x\}} \sim c_d |D|\, x^{d/2}$ $(x \to +\infty)$

(MORALMENTE $\lambda_n \sim \text{cost.}\, n^{2/d}$)

$$\mathbb{E}[C_s] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{1+s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda_n}^{\infty} \frac{1+s}{x^{2+s}}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{1+s}{x^{2+s}} \mathbb{1}_{\{x \ge \lambda_n\}}\, dx$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{1+s}{x^{2+s}} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\lambda_n \le x\}}\right)}_{N(x) \sim (\text{cost.})\, x^{d/2}} dx \le C_1 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{x^{2+s-\frac{d}{2}}}\, dx < \infty$$

$$\iff 2+s-\frac{d}{2} > 1$$

$$\iff s > \frac{d}{2}-1 \qquad \blacksquare$$

DEFINIAMO LA SUCCESSIONE DI APPROSSIMAZIONI DEL GFF: PER $N \in \mathbb{N}$

$$H^N := \sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega)\, h_n(x) \in H^1_0 = \mathcal{H}^1$$

$$= \sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega) \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

NON CI ASPETTIAMO CHE H^N CONVERGA IN H_0^1 $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n^2 = \infty \text{ Q.C.} \right)$

DEFINIAMO ORA PER $f \in L^2(D)$

$$H_f^N := \langle H^N, f \rangle = \sum_{n=1}^{N} Z_n \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\sqrt{\lambda_n}}$$

TEOREMA (GFF COME "DISTRIBUZ. ALEATORIA")

FISSIAMO $s > \frac{d}{2} - 1$. DEF. $A := \left\{ \omega \in \Omega : C_s(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\omega)^2}{\lambda_n^{1+s}} < \infty \right\}$.

$[\mathbb{P}(A) = 1]$. $\forall\, \omega \in A$, $\forall\, f \in \mathcal{H}^s$, IL LIMITE SEGUENTE ESISTE FINITO:

$$H_f(\omega) := \lim_{N\to\infty} H_f^N(\omega) = \lim_{N\to\infty} \langle H^N(\omega), f \rangle$$

DEFINENDO $H_f(\omega) \equiv 0 \ \forall\, \omega \notin A$, OTTENIAMO UN PROC. STOC. $H = (H_f)_{f \in \mathcal{H}^s}$ GAUSSIANO CENTRATO CON

$$\mathrm{Cov}\left[H_f, H_g \right] = G_D(f,g) = \int_{D\times D} \underbrace{f(x)}_{L^2(D)} \underbrace{G_D(x,y)}_{L^2(D\times D)} \underbrace{g(y)}_{L^2(D)} \, dx\, dy < \infty$$

IN PARTICOLARE, [LA RESTRIZIONE A $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}^s$ DI] H È GFF SU D.
INOLTRE, $\forall\, \omega \in \Omega$ LA TRAIETTORIA $f \mapsto H_f(\omega)$ È LINEARE E CONTINUA SU $\mathcal{H}^s$.

DIM. $\forall\, N \in \mathbb{N}$, H^N È PROC. GAUSS. E $f \mapsto H_f^N(\omega)$ È LINEARE $\forall \omega \in \Omega$.

SE MOSTRIAMO CHE $\lim_{N\to\infty} H_f^N(\omega) =: H_f(\omega)$ $\exists$ $\forall \omega \in A$, CON $\mathbb{P}(A)=1$,

E SE DEF. $H_f(\omega) \equiv 0$ $\forall\, \omega \notin A$, ALLORA $H = (H_f)_{f \in \mathcal{H}^s}$ È PROC. GAUSS.

[LIMITE Q.C. DI PROC. GAUSS.], INOLTRE $f \mapsto H_f(\omega)$ È LINEARE [LIMITE

PUNTUALE DI FUNZ. LIN.] . MOSTRIAMO L'ESISTENZA DEL LIMITE, QUINDI LA CONTINUITÀ IN f, INFINE CALCOLIAMO LA COVARIANZA.

$$\forall \omega \in A: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| Z_n \frac{\lambda_n^{s/2} \langle f, \varphi_n \rangle}{\sqrt{\lambda_n}\, \lambda_n^{s/2}} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{\lambda_n^{1+s}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s \langle f, \varphi_n \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_s^{1/2} \cdot \|f\|_{\mathcal{H}^s}$$

DUNQUE $H_f(\omega) = \lim_{N \to \infty} H_f^N(\omega) \; \exists \; \forall \omega \in A$ E $|H_f(\omega)| \leq C_s^{1/2} \|f\|_{\mathcal{H}^s}$

INFINE CALCOLIAMO LA COVARIANZA.

$$\mathrm{Cov}[H_f, H_g] = \lim_{N \to \infty} \mathrm{Cov}[H_f^N, H_g^N] = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_n \rangle}{\lambda_n}$$

RICORDIAMO CHE $\quad G_D \varphi_n = \lambda_n^{-1} \varphi_n$

$$G_D(f,g) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_m \rangle \langle g, \varphi_n \rangle \underbrace{G_D(\varphi_m, \varphi_n)}_{\langle \varphi_m, G_D \varphi_n \rangle = \langle \varphi_m, \lambda_n^{-1} \varphi_n \rangle = \delta_{mn} \lambda_n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_n \rangle}{\lambda_n}$$

$\blacksquare$

NOTA : $\quad G_D(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad [\text{IN } L^2(D \times D)]$.

OSS. ABBIAMO MOSTRATO CHE IL GFF PUÒ ESSERE REALIZZATO COME UN ELEMENTO (ALEATORIO) DELLO SPAZIO $\mathcal{H}^{-s} := (\mathcal{H}^s)^*$, $\forall s > \frac{d}{2} - 1$.

NON DEF. LA TOPOLOGIA DI $\mathcal{D} = C_c^\infty$, MA $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}^s$ CON INCL. CONTINUA

$\Rightarrow (\mathcal{H}^s)^* \subseteq \mathcal{D}^* = \mathcal{D}' =$ DISTRIBUZIONI SU D.

QUINDI IL GFF È UNA DISTRIBUZIONE ALEATORIA SU D.

NON ESISTE UNA CLASSE DI FUNZ. f "CANONICA" CHE INDICIZZA IL GFF $H = (H_f)$. SE SI SCEGLIE UNA CLASSE $\in \mathcal{H}^s$ CON $s > \frac{d}{2} - 1$, ALLORA SI PUÒ REALIZZARE IL GFF COME V.A. IN $\mathcal{H}^{-s} = (\mathcal{H}^s)^*$.

SE CI ACCONTENTIAMO DI DEFINIRE IL GFF COME PROC. STOC., ALLORA POSSIAMO AMPLIARE NOTEVOLMENTE LA CLASSE DI FUNZ. CHE LO INDICIZZA, FINO AD ARRIVARE A UNA CLASSE DI DISTRIBUZIONI : $\mathcal{H}^{-1} = (\mathcal{H}^1)^*$

$\stackrel{!}{=} (H_0^1)^*$!

INFATTI PER $f \in \mathcal{H}^{-1} = (\mathcal{H}^1)^*$, ALLORA

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \, f(\varphi_n)^2$$

INOLTRE SE $f, g \in L^2$, SAPPIAMO CHE

$$G_D(f,g) = \int_{D \times D} f(x) \, G_D(x,y) \, g(y) \, dx \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_n \rangle}{\lambda_n}$$

ALLORA È NATURALE DEF. PER $f, g \in \mathcal{H}^{-1}$ $\quad [\varphi_n \in C^\infty \subseteq \mathcal{H}^s \ \forall s]$

$$G_D(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\varphi_n) \, g(\varphi_n)}{\lambda_n} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^{-1}} \|g\|_{\mathcal{H}^{-1}}$$

IN EFFETTI QUESTA DEF. COINCIDE CON

$$G_D(f,g) = (f,g)_{\mathcal{H}^{-1}}$$

IN DEFINITIVA, POSSIAMO DEF. IL GFF $H = (H_f)_{f \in \mathcal{H}^{-1}}$ COME IL PROC. GAUSS. CENTRATO CON $\mathrm{Cov}[H_f, H_g] = (f,g)_{\mathcal{H}^{-1}}$

OSSIA COME IL PROC. GAUSS. ISONORMALE ASSOCIATO A $\mathcal{H}^{-1}$.

$\mathcal{H}^{-1}$ CONTIENE IN PART. LA SEGUENTE CLASSE DI MISURE

$$\mathcal{M} = \left\{ \mu \text{ MISURA SU } D : G_D(\mu,\mu) := \int_{D\times D} G_D(x,y)\, \mu(dx)\mu(dy) < \infty \right\}$$

DUNQUE POSSIAMO DEF H_μ PER $\mu \in \mathcal{M}$.

IN $d=1$ $\mu = \delta_x \in \mathcal{M}$. $G_D(x,y) \propto -\frac{1}{2}|x-y| + C$

IN $d \geq 2$, $\mu = \delta_x \notin \mathcal{M}$. TUTTAVIA, $\forall x \in D$, $\forall \varepsilon > 0$: $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq D$,

$$\mu = \sigma_{x,\varepsilon} := \text{PROB. UNIF. SU } \partial B(x,\varepsilon) \in \mathcal{M}$$

QUINDI POSSIAMO DEFINIRE $H_{\sigma_{x,\varepsilon}}$ = "IL GFF MEDIATO SULLA SFERA $\partial B(x,\varepsilon)$"

OSS. $H_{\sigma_{x,\varepsilon}} \sim N(0, G_D(\sigma_{x,\varepsilon}, \sigma_{x,\varepsilon}))$

D'ORA IN AVANTI $d=2$.

TEOR. FISSIAMO $x \in D$, SIA $\varepsilon_0 \in (0, \text{dist}(x,\partial D))$.
PER $t \geq t_0 := \log \frac{1}{\varepsilon_0}$, COSÌ CHE $e^{-t} \leq \varepsilon_0$, ALLORA

$$\left(B_t := H_{\sigma_{x,e^{-t}}}\right)_{t \geq t_0}$$

HA LA STESSA DISTRIBUZ. DI UN M.B. CHE PARTE DA B_{t_0}.

DUNQUE PER $t \to \infty$, $H_{\sigma_{x,e^{-t}}} \approx \sqrt{t} \cancel{\sqrt{\log\log t}}$

OSSIA $H_{\sigma_{x,\varepsilon}} \approx \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}$

DEF.

FISSIAMO $\alpha > 0$ E DICIAMO CHE UN PUNTO $x \in D$ È "α-THICK" SSE

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{H_{\sigma_{x,\varepsilon}}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \alpha$$

TEOR.

SIA T_α L'INSIEME (ALEATORIO) DEI PUNTI α-THICK. ALLORA, Q.C.,

$$\dim (T_\alpha) = \left(2 - \frac{\alpha^2}{2}\right)^+$$

E $T_\alpha = \emptyset$ SE $\alpha > 2$

SEMPRE IN $d=2$, ENUNCIAMO UN RISULTATO "SEMPLICE".

PROP.

SIA $D \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO LIMITATO CON FRONTIERA REG, SIA $\varphi : D \to D'$ OLOMORFA E BIUNIVOCA. SIA $H = (H_f)_{f \in \mathcal{D}(D)}$ GFF SU D.
ALLORA

$$H' := \left(H'_g := H_{g \circ \varphi}\right)_{g \in \mathcal{D}(D')}$$

È GFF SU D'.

2 - ABSTRACT WIENER SPACE

SIA $(H, (\cdot,\cdot))$ SP. DI HILBERT SEPARABILE. SIA $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ BASE ORTONORM.
SIANO $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ V.A. IID $N(0,1)$. PER $N\in\mathbb{N}$ DEF.

$$X^N := \sum_{n=1}^{N} Z_n h_n = \sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega) h_n$$

COSÌ CHE $X^N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to H$ SIA UNA V.A. A VAL. IN H.

DATO CHE $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n^2 = \infty$ Q.C., NON CI ASPETTIAMO CHE X^N CONVERGA IN H.

TUTTAVIA POSSIAMO COSTRUIRE UNO SP. DI BANACH $\mathcal{B} \supseteq H$ T.C.
$X^N \to X$ IN $\mathcal{B}$, Q.C. LA SCELTA DI $\mathcal{B}$ NON È UNICA, AD ES.
SI PUÒ SCEGLIERE $\mathcal{B} = (\mathcal{H})^*$ CON

$$\mathcal{H} := \left\{ h \in H : \|h\|_{\mathcal{H}}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\varepsilon} (h, h_n)^2 < \infty \right\} \subsetneq H$$

INFATTI $(\varepsilon > 0)$

$$|(X^N, h)| \leq \sum_{n=1}^{N} |Z_n(\omega)| |(h_n, h)|$$

$$\leq \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\omega)^2}{n^{1+\varepsilon}}}_{} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\varepsilon} (h, h_n)^2 \Big)$$

$$= C_1(\omega) \cdot \|h\|_{\mathcal{H}}$$

$(H, \mathcal{B}, i : H \to \mathcal{B})$ È DETTA SPAZIO DI WIENER ASTRATTO

$\downarrow$

CAMERON-MARTIN

$\boxed{\text{ES.}}$ $H = L^2(D) \longrightarrow X = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega)\, \underset{}{\overset{\text{BASE DI } L^2(D)}{\varphi_n}} \in \mathcal{H}^{-s}, \quad \forall s > \frac{d}{2}$

"WHITE NOISE" = RUMORE BIANCO

FINE!